





1

*Amalio Shchams* é o nome científico de uma espécie rara de planta, típica do noroeste do continente africano. O caule dessa planta é composto por colmos, cujas características são semelhantes ao caule da cana-de-açúcar. Curiosamente, seu caule é composto por colmos claros e escuros, intercalados. À medida que a planta cresce e se desenvolve, a quantidade de colmos claros e escuros aumenta, obedecendo a um determinado padrão de desenvolvimento que dura, geralmente, 8 meses.

- \* No final da primeira etapa, a planta apresenta um colmo claro.
- \* Durante a segunda etapa, desenvolve-se um colmo escuro no meio do colmo claro, de modo que, ao final da segunda etapa, o caule apresenta um colmo escuro e dois colmos claros.
- \* Na terceira etapa, o processo se repete, ou seja, um colmo escuro se desenvolve em cada colmo claro, como ilustra o esquema a seguir.

1ª Etapa	2ª Etapa	3ª Etapa	4ª Etapa	
1 colmo claro.	1 colmo escuro e 2 colmos claros.	3 colmos escuros e 4 colmos claros.	7 colmos escuros e 8 colmos claros.	E assim sucessivamente.
				

- a) Represente algebricamente a lei de formação de uma função que expresse a quantidade total de colmos dessa planta ao final de  $n$  etapas.  
 Apresente os cálculos realizados na resolução desse item.
- b) Ao final de 15 etapas, quais serão as quantidades de colmos claros e escuros dessa planta?  
 Apresente os cálculos realizados na resolução desse item.

### QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

#### Conteúdo programático:

- \* Função Exponencial.
- \* Progressão Geométrica.

#### Resposta esperada:

Segundo os dados fornecidos nas etapas, pode-se agrupar os colmos no quadro a seguir.

Etapas	Colmos claros	Colmos escuros	Total
1ª	1	0	1
2ª	2	1	3
3ª	4	3	7
4ª	8	7	15
5ª	16	15	31
...	...	...	...
n	$2^{n-1}$	$2^{n-1} - 1$	$2^n - 1$

- a) A função que representa a quantidade total de colmos ao final de  $n$  etapas é

$$f(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) \implies f(n) = 2^n - 1$$

- b) Ao final de 15 etapas, as quantidades de colmos claros e escuros são, respectivamente,

$$f(15) = 2^{15-1} = 2^{14} = 16384 \quad \text{e} \quad f(15) = (2^{15-1} - 1) = 2^{14} - 1 = 16383$$

#### Resolução alternativa para o item b):

Desenvolver os cálculos no quadro até encontrar o valor desejado

Etapas	Colmos claros	Colmos escuros	Total
1ª	1	0	1
2ª	2	1	3
3ª	4	3	7
4ª	8	7	15
5ª	16	15	31
6ª	32	31	63
7ª	64	63	127
8ª	128	127	255
9ª	256	255	511
10ª	512	511	1023
11ª	1024	1023	2047
12ª	2048	2047	4095
13ª	4096	4095	8191
14ª	8192	8191	16383
15ª	16384	16383	32767

Ao final de 15 etapas, as quantidades de colmos claros e escuros são, respectivamente, 16384 e 16383.

2

Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

**Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.**

**Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.**

**Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.**

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

## QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

### Conteúdo programático:

Sistema de equações lineares de primeiro grau. Matrizes. Escalonamento.

### Resposta esperada:

Considere as notações F: pão francês; G: pão baguete; T: pão de batata. A produção diária de cada padeiro é dada pelo quadro a seguir.

	F	G	T
A	30	100	20
B	30	70	20
C	90	30	100

Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as quantidades de padeiros dos tipos A, B, C, respectivamente, temos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 30x + 30y + 90z = 420 & (\div 10) \\ 100x + 70y + 30z = 770 & (\div 10) \\ 20x + 20y + 100z = 360 & (\div 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 9z = 42 & (\div 3) \\ 10x + 7y + 3z = 77 \\ 2x + 2y + 10z = 36 & (\div 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 14 & (1) \\ 10x + 7y + 3z = 77 & (2) \\ x + y + 5z = 18 & (3) \end{cases}$$

De (1) segue que  $x + y = 14 - 3z$ , substituindo em (3),  $(14 - 3z) + 5z = 18$ , logo  $2z = 4$  e  $z = 2$ . Substituindo  $z$  em (1) e (2), tem-se

$$\begin{cases} x + y + 6 = 14 \\ 10x + 7y + 6 = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 10x + 7y = 71 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Dessa forma, a padaria precisa de 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 padeiros do tipo C para obter a produção diária desejada.

### Resolução alternativa:

Considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$  as quantidades de padeiros dos tipos A, B, C, respectivamente, tem-se o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 30x + 30y + 90z = 420 \\ 100x + 70y + 30z = 770 \\ 20x + 20y + 100z = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 9z = 42 \\ 10x + 7y + 3z = 77 \\ 2x + 2y + 10z = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 14 \\ 10x + 7y + 3z = 77 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$

Montando a matriz para se resolver por escalonamento, tem-se

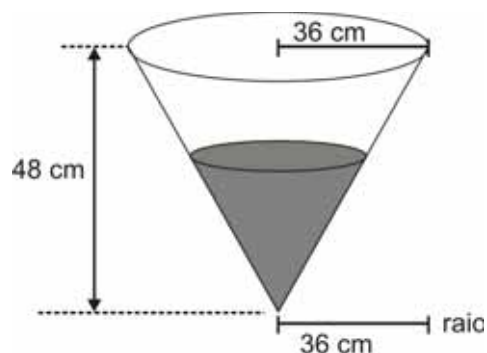
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 14 \\ 10 & 7 & 3 & 77 \\ 1 & 1 & 5 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 10L_1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & -3 & -27 & -63 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[L_4 \div 2]{L_2 \div (-3)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 9 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 - 9L_3]{L_1 - 3L_3} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - L_2} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Disso segue que  $x = 5$ ,  $y = 3$  e  $z = 2$ .

Assim, a padaria precisa de 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 padeiros do tipo C para obter a produção diária desejada.

3

Uma empresa que produz embalagens plásticas está elaborando um recipiente de formato cônico com uma determinada capacidade, conforme o modelo a seguir.



Sabendo que o raio desse recipiente mede 36 cm e que sua altura é de 48 cm, a que distância do vértice deve ser feita uma marca na superfície lateral do recipiente para indicar a metade de sua capacidade?

**Despreze a espessura do material do qual é feito o recipiente.**

**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

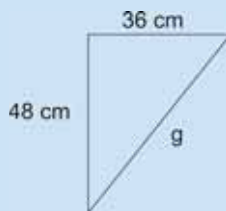
### QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

#### Conteúdo programático:

- \* Corpo redondo: cone.
- \* Cálculo de volume.
- \* Razão de semelhança entre volumes.
- \* Relações métricas no triângulo retângulo.
- \* Semelhança de triângulos.

#### Resposta esperada:

É possível identificar, a partir das medidas do cone, relações métricas no triângulo retângulo. Com as medidas do raio, da altura e da geratriz (g), tem-se



$$\begin{aligned} g^2 &= 36^2 + 48^2 \\ g^2 &= 1296 + 2304 \\ g^2 &= 3600 \\ g &= \sqrt{3600} \\ g &= 60 \end{aligned}$$

Portanto, a medida da geratriz do cone é 60 cm.

Sabendo que a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança entre algumas das medidas do cone, toma-se como base a razão de semelhança entre as medidas das geratrizes dos cones.

Como o volume do cone menor é a metade do cone maior, tem-se

Considere

$g_2$  : a geratriz do cone maior.

$V_2$  : o volume do cone maior.

$g_1$  : a geratriz do cone menor.

$V_1$  : o volume do cone menor.

$$\frac{V_2}{V_1} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^3 = 2$$

$$\text{Logo: } \left(\frac{60}{g_1}\right)^3 = 2 \implies 2g_1^3 = 216000 \implies g_1^3 = 108000 \implies$$

$$g_1 = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 5^3} \implies g_1 = 30\sqrt[3]{4}$$

Portanto, a marca a ser feita no cone deve estar a  $30\sqrt[3]{4}$  cm do vértice.

#### Resolução alternativa:

Considere

$g_2$  : a geratriz do cone maior.

$V_2$  : o volume do cone maior.

$g_1$  : a geratriz do cone menor.

$V_1$  : o volume do cone menor.

$$\text{Usando a fórmula do volume do cone } V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 36^2 \cdot 48}{3} = \pi \cdot 36^2 \cdot 16 = 20736\pi$$

$$V_1 = \frac{V_2}{2} = 10368\pi$$

$$\text{Como } V_1 = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1}{3} = 10368\pi, \quad \text{segue que } r_1^2 \cdot h_1 = 31104 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Por semelhança de triângulos, segue que } \frac{36}{r_1} = \frac{48}{h_1} \implies h_1 = \frac{4}{3}r_1 \quad (\text{II}).$$

$$\text{Por (I) e (II), tem-se } r_1^2 \cdot h_1 = r_1^2 \cdot \left(\frac{4}{3}r_1\right) = \frac{4}{3}r_1^3 = 31104$$

$$\text{Logo } r_1^3 = 31104 \cdot \frac{3}{4} = 23328 \implies r_1 = 18\sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad h_1 = \frac{4}{3} \cdot 18\sqrt[3]{4} = 24\sqrt[3]{4}$$

Pelas relações métricas no triângulo retângulo

$$g_1^2 = h_1^2 + r_1^2 = (24\sqrt[3]{4})^2 + (18\sqrt[3]{4})^2 = (24^2 + 18^2) \cdot (\sqrt[3]{4})^2 = 900 \cdot (\sqrt[3]{4})^2$$

$$\text{Assim, } g_1^2 = 900 \cdot (\sqrt[3]{4})^2 \implies g_1 = 30\sqrt[3]{4}$$

Portanto, a marca a ser feita no cone deve estar a  $30\sqrt[3]{4}$  cm do vértice.

João publicou na Internet um vídeo muito engraçado que fez com sua filha caçula. Ele observou e registrou a quantidade de visualizações do vídeo em cada dia, de acordo com o seguinte quadro.

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1	$7x$
2	$21x$
3	$63x$
...	...

Na tentativa de testar os conhecimentos matemáticos de seu filho mais velho, João o desafiou a descobrir qual era a quantidade  $x$ , expressa no quadro, para que a quantidade total de visualizações ao final dos 5 primeiros dias fosse 12705.

- a) Sabendo que o filho de João resolveu corretamente o desafio, qual resposta ele deve fornecer ao pai para informar a quantidade exata de visualizações representada pela incógnita  $x$ ?  
Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.

- b) Nos demais dias, a quantidade de visualizações continuou aumentando, seguindo o mesmo padrão dos primeiros dias. Em um único dia houve exatamente 2066715 visualizações registradas desse vídeo. Que dia foi este?

**Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.**

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

#### QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

##### Conteúdo programático:

Progressão geométrica. Soma dos termos da PG.

##### Resposta esperada:

a) Tem-se

$$S_5 = 12705$$

$$a_1 = 7x$$

$$q = 3$$

$$n = 5$$

Usando a Fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{7x \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$\text{Logo, } 12705 = \frac{7x \cdot (243 - 1)}{2} \Rightarrow 12705 = \frac{7x \cdot 242}{2} \Rightarrow 12705 = 847x$$

$$x = \frac{12705}{847} = 15$$

Portanto, a resposta que o filho deve dar ao pai é  $x = 15$ .

b) Tem-se

$$a_1 = 7x$$

$$a_n = 2066715$$

$$q = 3$$

$$n =$$

Usando a Fórmula:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$2066715 = 105 \times 3^{n-1}$$

$$3^{n-1} = \frac{2066715}{105} = \frac{3^{10} \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} \Rightarrow 3^{n-1} = 3^9 \Rightarrow n = 10$$

Portanto, foi no décimo dia que houve 2066715 visualizações do vídeo.

##### Resolução alternativa para o item a):

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1º	$7x$
2º	$21x$
3º	$63x$
4º	$189x$
5º	$567x$

Somando a quantidade de visualizações representadas algebricamente, tem-se

$$7x + 21x + 63x + 189x + 567x = 12705$$

$$847x = 12705$$

$$x = 15$$

Portanto, a resposta que o filho deve dar ao pai é  $x = 15$ .

##### Resolução alternativa para o item b):

Obtendo o valor de  $x$  no item a), basta descobrir a quantidade de visualizações no primeiro dia e multiplicar os seguintes por 3 de forma sucessiva até obter o  $a_n = 2066715$ .

Dia	Quantidade de visualizações	Dia	Quantidade de visualizações
1	105	6	25515
2	315	7	76545
3	945	8	229635
4	2835	9	688905
5	8505	10	2066715

Portanto, foi no décimo dia que houve 2066715 visualizações do vídeo.